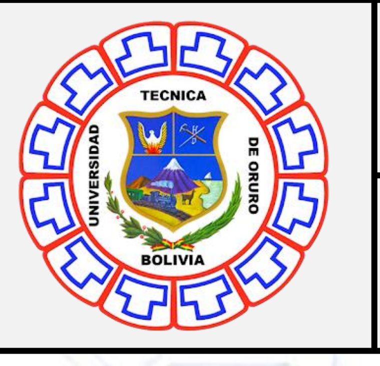


Universidad Técnica de Oruro
Facultad Nacional de Ingeniería
Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Electrónica



CLASE Nº 1

ELT 2692

LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAICES (LGR)

AUXILIAR: Egr. RIOS COLQUE PABLO MARTIN
DOCENTE: M.Sc. Ing. RAMIRO FRANZ ALIENDRE GARCIA
MATERIA: SISTEMAS DE CONTROL 2 – ELT 2692 A

ORURO – BOLIVIA
SEM I/2025

Definicion

- El lugar geometrico de las raices (LGR) es un metodo grafico que me permite observar la trayectoria de los polos de lazo cerrado del sistema (raices de la ecuacion caracteristica) a medida que se hace variar un parametro o ganancia proporcional K desde 0 hasta infinito.

- Los puntos sobre el lugar geometrico de las raices donde $K = 0$ son los polos de lazo abierto.

- Los puntos sobre el lugar geometrico de las raices donde $K = \pm\infty$ son los ceros de lazo abierto.

- El lugar geometrico de las raices inicia con los polos de lazo abierto y termina en los ceros de lazo abierto.

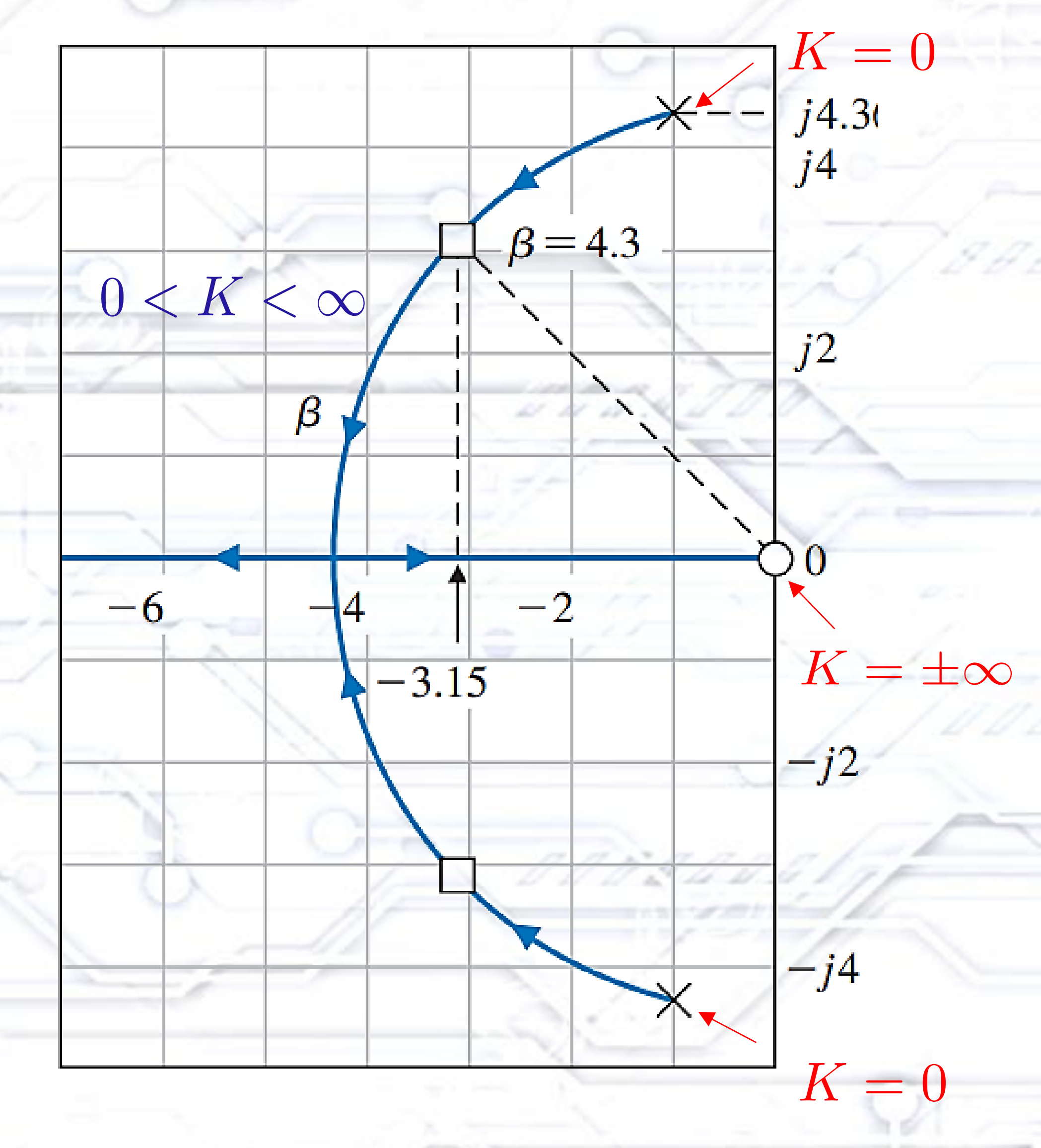


Figura 1: Lugar geometrico de las raices.

Propiedades Basicas

Dado el siguiente de sistema de control:

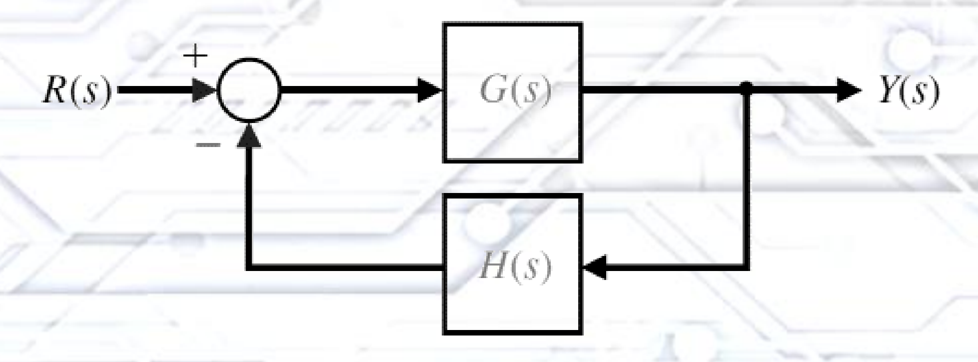


Figura 2: Sistema de control lazo cerrado.

$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

La ecuacion caracteristica de uns sitema realimentado esta dado por:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + F(s) = 0$$

Suponiendo que $F(s)$ contiene un parametro o constante proporcional K se lo puede expresar como:

$$F(s) = KG_1(s)H_1(s)$$

Las condiciones que se debe cumplir de manera simultanea en el LGR son:

$$|KG_1(s)H_1(s)|\angle KG_1(s)H_1(s) = -1 + j0$$

$$|KG_1(s)H_1(s)|\angle KG_1(s)H_1(s) = 1e^{-j\pi}$$

Condición de Módulo o Magnitud:

$$|KG_1(s)H_1(s)| = 1$$

Condición de Angulo:

$$\angle KG_1(s)H_1(s) = -180^\circ \pm k360^\circ$$

La Ecuacion caracteristica se lo puede escribir como:

$$F(s) = -1 + j0$$

La funcion de transferencia en forma de polos y ceros es:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

Aplicando las condiciones a la ecuacion anterior tenemos:

$$|F(s)| = \frac{K|s+z_1||s+z_2|...|s+z_m|}{|s+p_1||s+p_2|...|s+p_n|} = 1$$

$$\angle F(s) = \angle(s+z_1) + \angle(s+z_2) + \cdots + \angle(s+z_m) +$$
$$\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2) + \cdots + \angle(s+p_n) = -180^\circ \pm k360^\circ$$

$$|F(s)| = K\frac{\prod_{k=1}^{m}|s+z_k|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|} = 1$$

$$\angle F(s) = \sum_{k=1}^{m}\angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)$$
$$= -180^\circ \pm k360^\circ$$

Figura 3: Condicion de Modulo y Angulo

Ejercicio 1: Considerando el sistema mostrado en la figura, dibujar el lugar geométrico de las raíces para el sistema. Determinar el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.707. Después, determinar todos los polos en lazo cerrado del sistema. Utilizar el valor de la ganancia K calculado para obtener la respuesta (con precisión y sin el cálculo de la transformada inversa de Laplace) a un escalón unitario del sistema.

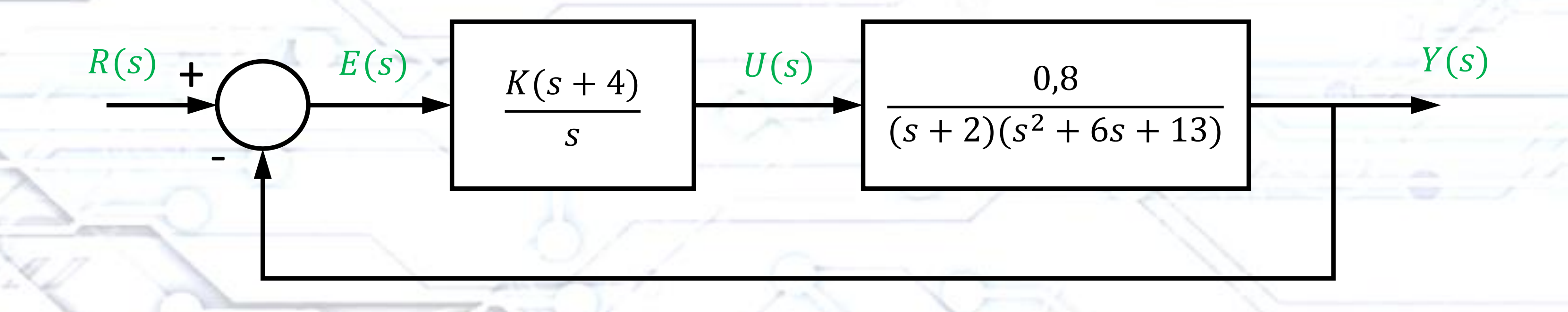


Figura 4: Sistema de control Ejercicio 1

Paso 1: Ecuación Característica:

$$1 + F(s) = 0$$

$$1 + \frac{0.8K(s+4)}{s(s+2)(s^2+6s+13)} = 0$$

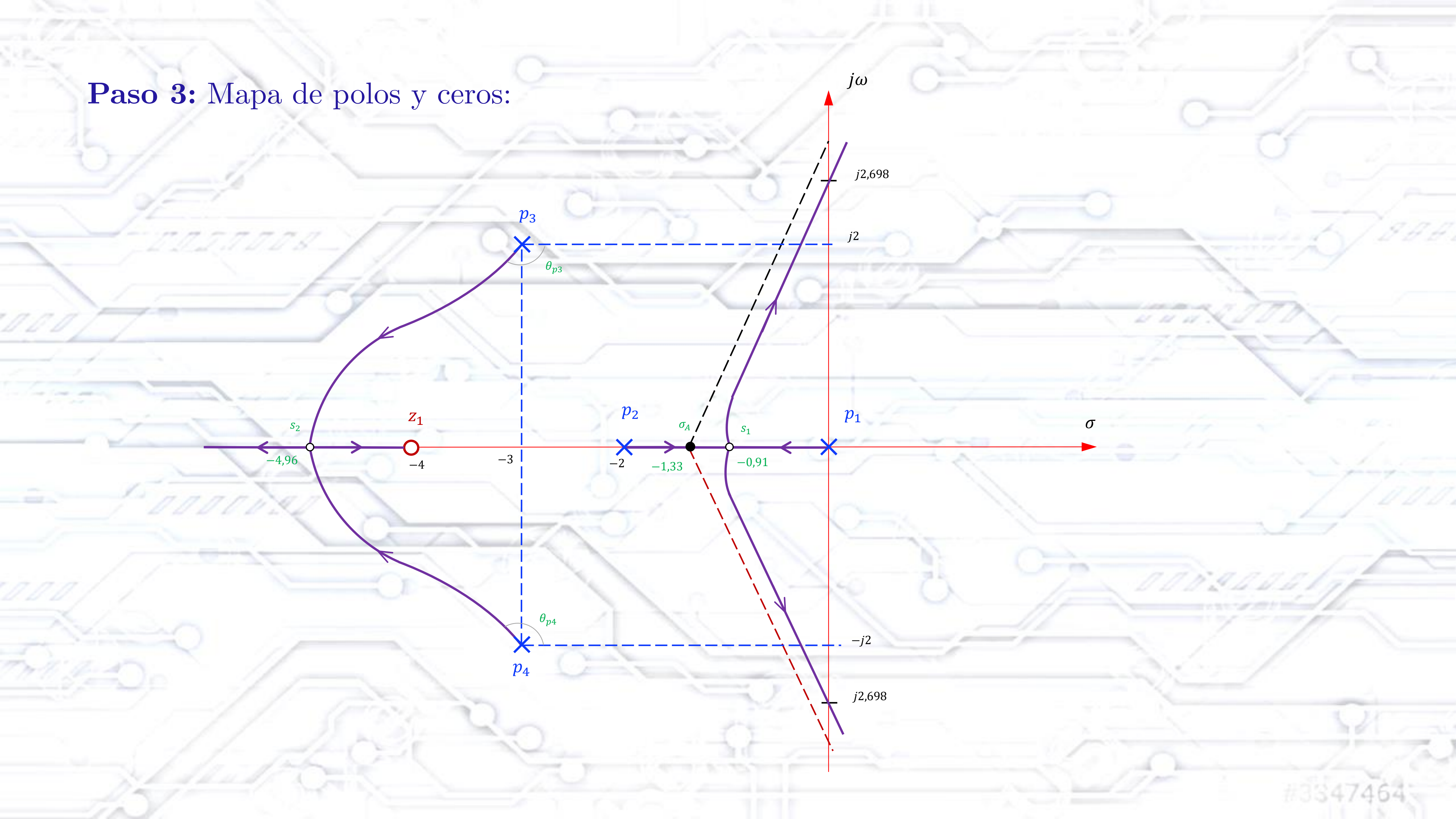
Paso 2: Forma de polos y ceros:

$$1 + \frac{K_{RL}(s+4)}{s(s+2)(s+3-j2)(s+3+j2)} = 0$$

Donde: $K_{RL} = 0.8K$

- $n_p = 4$, $n_z = 1$
- Polos: $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3 + j2$, $p_4 = -3 - j2$
- Cero: $z_1 = -4$

Paso 3: Mapa de polos y ceros:



Paso 4: LGR a la izquierda de un numero impar de polos y ceros:

Paso 5: Numero de ramas es igual al número de polos: Nro ramas = Nro polos

Paso 6: LGR simétrico al eje real:

Paso 7: Centro y Angulo de asintotas:

Centro de Asintotas:

$$\sigma_A = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n_p - n_z} = \frac{0 + (-2) + (-3 + j2) + (-3 - j2) - (-4)}{4 - 1}$$

$$\sigma_A = -\frac{4}{3} = -1{,}333$$

Ángulo de Asíntotas:

$$q = n_p - n_z - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

$$q = 0, 1, 2 \rightarrow \varphi_A = \frac{2q + 1}{n_p - n_z} \times 180^\circ$$

Paso 7: Centro y Angulo de asintotas:

Ángulo de Asíntotas:

$$\varphi_{A1} = \frac{2(0)+1}{4-1} \times 180^\circ \rightarrow \varphi_{A1} = 60^\circ$$

$$\varphi_{A2} = \frac{2(1)+1}{4-1} \times 180^\circ \rightarrow \varphi_{A2} = 180^\circ$$

$$\varphi_{A3} = \frac{2(2)+1}{4-1} \times 180^\circ \rightarrow \varphi_{A3} = 300^\circ$$

Paso 8: Puntos por donde el LGR cruza por el eje imaginario:

$$s(s+2)(s^2+6s+13) + K_{RL}(s+4) = 0$$

$$s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s + K_{RL}(s+4) = 0$$

$$s^4 + 8s^3 + 25s^2 + (26 + K_{RL})s + 4K_{RL} = 0$$

Paso 8: Puntos por donde el LGR cruza por el eje imaginario:

Evaluando $s = j\omega$ en la ecuación característica:

$$(j\omega)^4 + 8(j\omega)^3 + 25(j\omega)^2 + (26 + K_{RL})j\omega + 4K_{RL} = 0$$

$$\omega^4 - j8\omega^3 - 25\omega^2 + (26 + K_{RL})j\omega + 4K_{RL} = 0$$

$$\underbrace{\omega^4 - 25\omega^2 + 4K_{RL}}_{\text{Parte Real}} + j\underbrace{\left[(26 + K_{RL})\omega - 8\omega^3\right]}_{\text{Parte Imaginaria}} = 0$$

Separando parte real e imaginaria:

$$\begin{cases} \omega^4 - 25\omega^2 + 4K_{RL} = 0 \quad (1) \\ (26 + K_{RL})\omega - 8\omega^3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

En (2):

$$\omega\left(26 + K_{RL} - 8\omega^2\right) = 0$$

$$\omega^2 = 3{,}25 + 0{,}125K_{RL}$$

Paso 8: Puntos por donde el LGR cruza por el eje imaginario:

Reemplazando en (1):

$$(3{,}25 + 0{,}125K_{RL})^2 - 25(3{,}25 + 0{,}125K_{RL}) + 4K_{RL} = 0$$

$$10{,}5625 + 0{,}8125K_{RL} + 0{,}015625K_{RL}^2 - (81{,}25 + 3{,}125K_{RL}) + 4K_{RL} = 0$$

$$0{,}015625K_{RL}^2 + 1{,}6875K_{RL} - 70{,}6875 = 0$$

$$K_{RL} = 32{,}2554$$

Como $K_{RL} = 0.8K$:

$$K = K_{cr} = 40{,}32$$

$$\omega = \omega_{osc} = \pm 2{,}6985 = 2{,}6985\,[\text{rad/s}]$$

Paso 9: Puntos de quiebre:

$$s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s + K_{RL}(s+4) = 0$$

$$K_{RL} = -\frac{s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s}{s+4}$$

$$\frac{dK_{RL}}{ds} = -\frac{(4s^3 + 24s^2 + 50s + 26)(s+4) - (s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s)(1)}{(s+4)^2} = 0$$

$$(4s^4 + 40s^3 + 146s^2 + 226s + 104) - (s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s) = 0$$

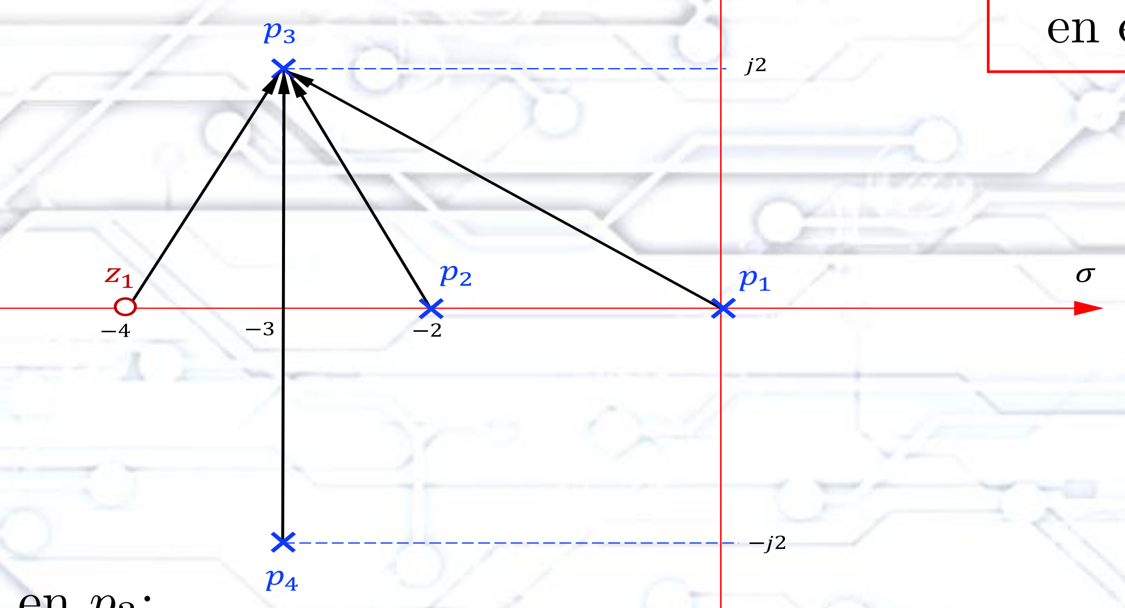
$$3s^4 + 32s^3 + 121s^2 + 200s + 104 = 0$$

Resolviendo:

$$s_1 = -0.9128 \quad \text{(si es un punto de quiebre)}$$
$$s_2 = -4.9625 \quad \text{(si es un punto de quiebre)}$$
$$s_3 = -2.3957 + j1.3833 \quad \text{(no es un punto de quiebre)}$$
$$s_4 = -2.3957 - j1.3833 \quad \text{(no es un punto de quiebre)}$$

Paso 10: Angulo de salida de un polo y/o angulo de llegada a un cero:

Como tenemos polos imaginarios:



El dibujo del LGR se encuentra en el Paso 3.

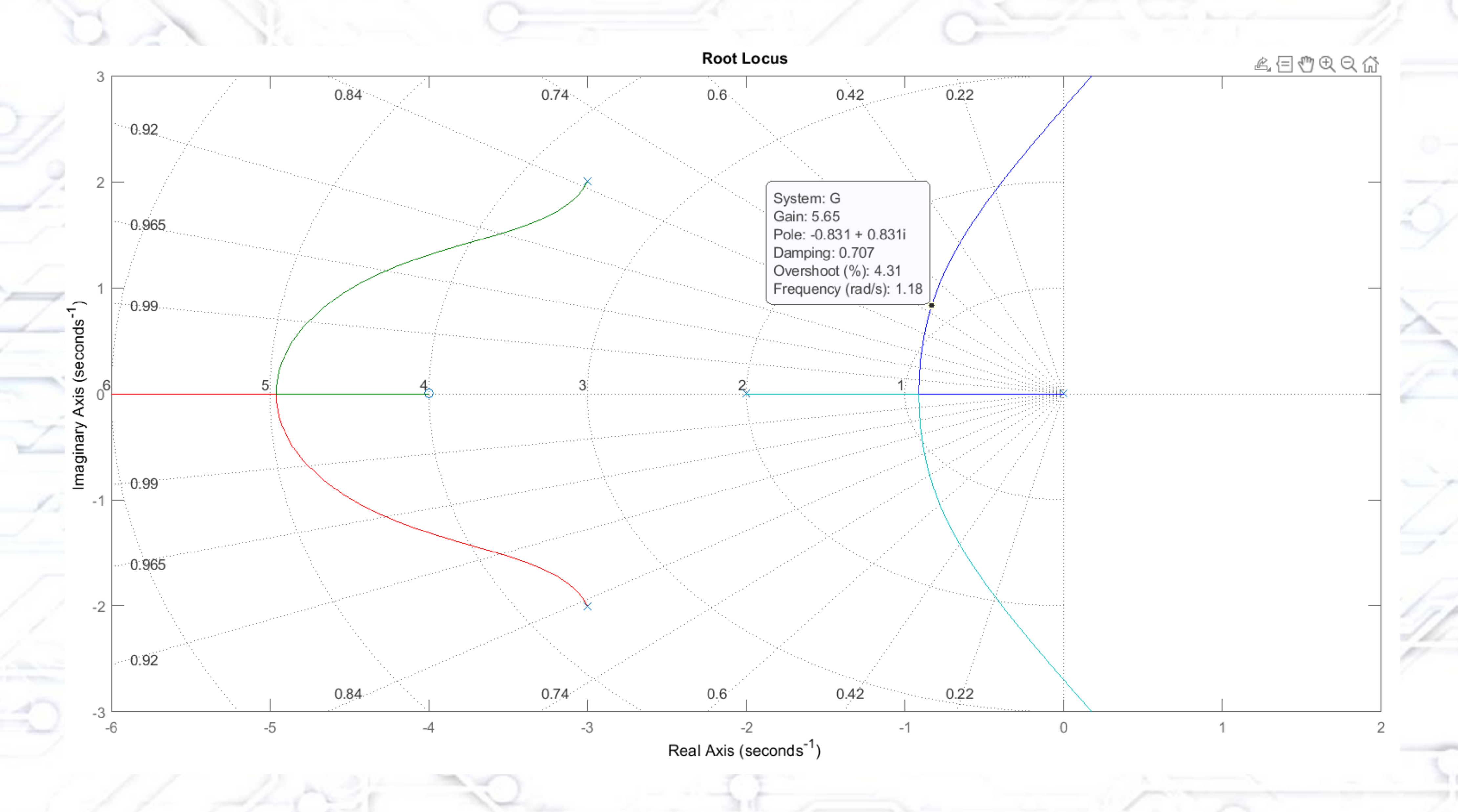
Condicion de angulo en p_3:

$$\sum \theta_{zi} - \sum \theta_{pi} = -180^\circ$$

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} - \theta_{p_4} = -180^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - \left[180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] - \left[180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)\right] - \theta_{p_3} - 90^\circ = -180^\circ$$

$$\theta_{p_3} = -109{,}44^\circ \quad \therefore \quad \theta_{p_4} = 109{,}44^\circ$$



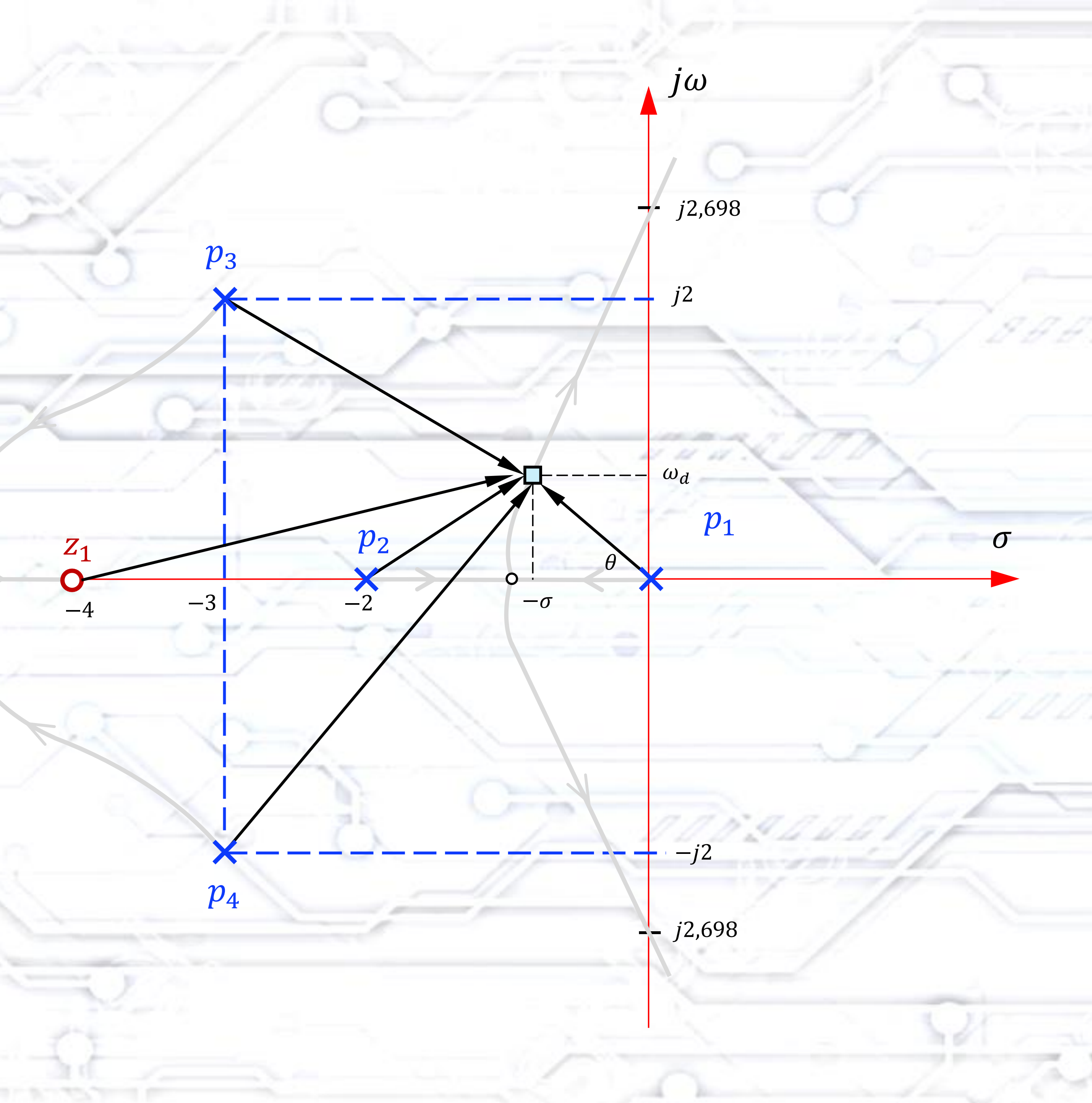
Root Locus
System: G
Gain: 5.65
Pole: -0.831 + 0.831i
Damping: 0.707
Overshoot (%): 4.31
Frequency (rad/s): 1.18
0.84
0.74
0.6
0.42
0.22
0.92
0.965
0.99
6
5
4
3
2
1
3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Polo deseado:

Como $\zeta = 0{,}707 \rightarrow \theta = 45°$; $\%M_p = 4{,}3\,\%$

$$P_d = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = 45° \rightarrow \omega_d = \sigma$$



Polo deseado:

Condición de angulo:

$$\sum \theta_{zi} - \sum \theta_{pi} = -180^\circ$$

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} - \theta_{p_4} = -180^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{4-\sigma}\right) - 135^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{2-\sigma}\right) - \left[-\tan^{-1}\left(\frac{2-\omega_d}{3-\sigma}\right)\right] - \tan^{-1}\left(\frac{2+\omega_d}{3-\sigma}\right) = -180^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{4-\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{2-\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2-\sigma}{3-\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2+\sigma}{3-\sigma}\right) = -45^\circ$$

Resolviendo:

$$\sigma = 0{,}832 \quad \omega_d = 0{,}832$$

$$p_d = -0{,}832 \pm j0{,}832$$

Polo deseado:

Condición de modulo:

$$K_{RL} = \left| \frac{s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 26s}{s+4} \right|_{s=-0,832+j0,832}$$

$$K_{RL} = 4{,}52455$$

$$\boxed{K = 5{,}6557}$$

Polos de lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{4,52455(s+4)}{s(s+2)(s^2+6s+13)}}{1 + \frac{4,52455(s+4)}{s(s+2)(s^2+6s+13)}} = \frac{4{,}52455(s+4)}{s^4 + 8s^3 + 25s^2 + 30{,}52455s + 18{,}0982}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4{,}52455(s+4)}{(s+0{,}832-j0{,}832)(s+0{,}832+j0{,}832)(s+3{,}168-j1{,}742)(s+3{,}168+j1{,}742)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_1 = -0{,}832 + j0{,}832, & p_2 = -0{,}832 - j0{,}832 \\ p_3 = -3{,}168 + j1{,}742, & p_4 = -3{,}168 - j1{,}742 \end{array}}$$

Caracteristicas temporales:

Los polos dominantes son:

$$p_{1-2} = -0{,}832 \pm j0{,}832$$

Como el sistema de lazo cerrado es de tipo 1 ante entrada escalón entonces:

$$e_{ss} = 0$$

Sobrepico:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{-\pi \cdot 0{,}707}{\sqrt{1-0{,}707^2}}}$$

$$M_p = 0{,}043 \rightarrow \%M_p = 4{,}3\,\%$$

Tiempo pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0{,}832} = 3{,}776\,[\text{seg}]$$

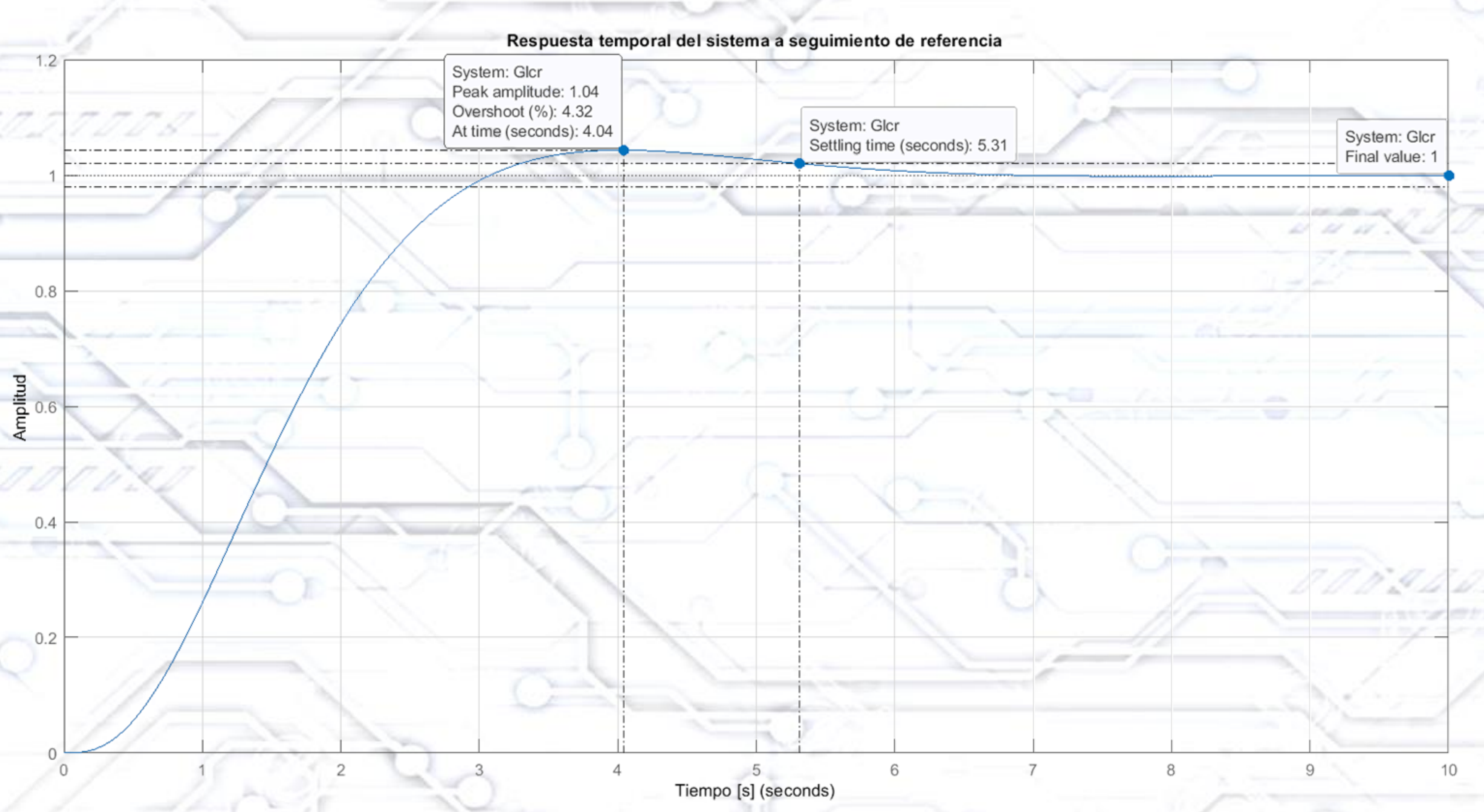
Tiempo de establecimiento(criterio 2%):

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{0{,}832} = 4{,}808\,[\text{seg}]$$

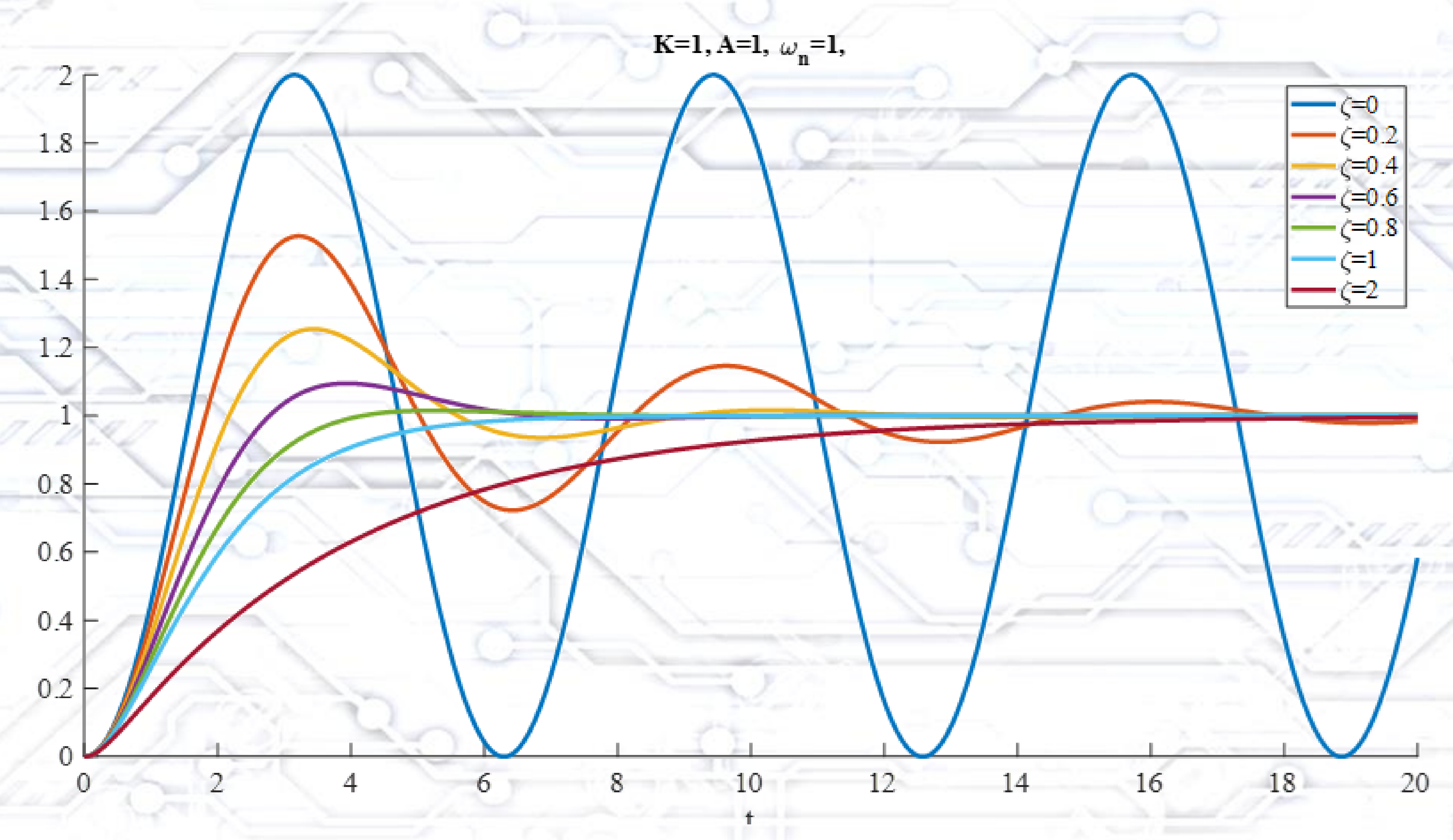
Tipo de Sistema	Escalón $r(t) = A$	Rampa $r(t) = At$	Parábola $r(t) = \frac{At^2}{2}$
0	$\frac{A}{1+k_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{A}{k_v}$	∞
2	0	0	$\frac{A}{k_a}$

Caracteristicas temporales:

De la simulación en Matlab se obtuvo:



Respuesta temporal de uns sitema de segundo orden para diferentes valores del factor de amortiguaiento:




¡Gracias!